

Cómo se revela esta influencia en diferentes núcleos conceptuales de la asignatura en el nivel medio.

La resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas

El estudio de las ecuaciones en la escuela se realiza, generalmente, mediante la vía analítica con procedimientos de solución exactos, viéndose la resolución de ecuaciones reducida al estudio de dos algoritmos fundamentales a utilizar de forma mecánica y se pierde el componente de pensamiento matemático de búsqueda de investigación; además, se asume como algo terminado, ya hecho, en lo que no puede aportarse nada nuevo.

El uso de herramientas computacionales permite superar las limitaciones impuestas por el uso exclusivo, en la práctica escolar, del método analítico; se puede formar

una idea más general de la resolución de ecuaciones como búsqueda, como una actividad desarrolladora y con mayores posibilidades de aplicación y se eliminan las restricciones a ecuaciones de primer y segundo grado.

Al mismo tiempo se contribuye a formar un pensamiento matemático más adecuado ya que las ecuaciones que se resuelven algorítmicamente constituyen en realidad una excepción.

Las herramientas para la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas pueden concebirse a partir de los métodos numéricos, o a partir del método gráfico.

Una dificultad en la introducción de los métodos numéricos en este nivel de enseñanza está relacionada con la comprensión y programación de los algoritmos correspondientes, esto obliga a la confección de

herramientas a nivel de "caja negra", o sea, el alumno proporciona los datos y la máquina devuelve las soluciones aproximadas de la ecuación, con lo que se pierde la posibilidad de utilizar la búsqueda del algoritmo como una forma de desarrollar el pensamiento en este sentido.

La introducción de medios de cómputo en la



enseñanza de la matemática posibilita la resolución de ecuaciones mediante el "rastreo" de sus soluciones.

La estrategia didáctica consiste en plantearle al alumno la tarea de encontrar las soluciones de una ecuación mediante la confección de un algoritmo para evaluar el polinomio, utilizando el concepto de conjunto solución. De esta manera la búsqueda está en la elaboración del algoritmo a partir de esta orientación inicial y en la selección de los valores para evaluar la expresión algebraica, que de ningún modo deberá ser por prueba y error, sino siguiendo una estrategia también orientada, tal y como se precisa posteriormente.

Los alumnos deben ser orientados mediante la utilización de gráficos y la observación de los datos que se obtienen al evaluar el polinomio, para que aprecien el cambio de signo de dichos valores, antes y después de aparecer el valor cero, de manera tal que puedan establecer como premisa que si se produce un cambio de signo entre dos valores

dados, entonces en ese intervalo hay una solución de la ecuación, aprovechando el significado intuitivo que la continuidad tiene para ellos.

La búsqueda del algoritmo, su expresión en un lenguaje de programación, su edición, ejecución en el ordenador y el establecimiento de una estrategia de búsqueda de los números en que debe ser evaluado el polinomio, constituyen acciones que los alumnos deben emprender, garantizándose la actividad independiente del escolar durante la realización del ejercicio.

Hay que notar que este tratamiento de los algoritmos hace que la introducción de la computación, en lugar de mecanizar las acciones y sustituir al pensamiento, permite reforzar los conceptos, propiciando el trabajo de búsqueda activa e independiente por parte de los alumnos y colocándolos en situación de utilizar formas Matemáticas de la comprensión y representación de la realidad, lo que significa una contribución importante al desarrollo de su pensamiento matemático.

De esta manera la computación contribuye a:

- ✍ comprender el significado del concepto conjunto solución,
- ✍ usar el significado (idea de búsqueda),
- ✍ comprender que los algoritmos aportan soluciones en casos especiales,
- ✍ reforzar el concepto de variable,
- ✍ reforzar la idea de la resolución de un problema a través de un proceso de aproximación.

La utilización del método gráfico, resulta sumamente útil cuando se dispone del ordenador o de la

calculadora gráfica. El método gráfico realiza un aporte notable al desarrollo matemático de los escolares, pues la computadora o calculadora gráfica sólo se encarga de representar las funciones asociadas y el alumno

El estudio de las funciones.

Es un encargo de la enseñanza de la Matemática moderna que el alumno comprenda el concepto de función, la dependencia funcional y la importancia que esta tiene para la aplicación de la matemática a múltiples procesos biológicos y técnicos en general, así como, al desarrollo de las matemáticas superiores.

En la práctica se ha impuesto un tratamiento de las funciones con un carácter esquemático, determinado por la definición de funciones a partir de la ecuación que las define, la memorización de sus propiedades y el establecimiento de procedimientos específicos para la representación gráfica de los diferentes tipos.

Los alumnos asocian incorrectamente la idea de función a la de una fórmula constituyendo esto expresión de una comprensión limitada del concepto. Los alumnos no llegan a comprender que una función definida por trozos es una función, pues se pone en primer plano la manipulación algebraica.

Con la ayuda de la computación se puede hacer comprender que basta una ley que puede asignar a cada valor del dominio uno del conjunto de llegada para tener definida una función. Además, posibilita el tratamiento de disímiles funciones desde edades tempranas, pues el ordenador se encarga de la evaluación de la expresión e incluso de la representación gráfica si fuese necesario, aspectos de

resuelve sobre esta base la inequación, ecuación o sistema para lo cual debe manejar un procedimiento general.

Es importante que el programa que se confeccione permita a los

mayor dificultad, pudiéndose ejercitar a los alumnos en el análisis de las propiedades y el estudio de su comportamiento en diferentes intervalos, lo que resulta de una gran utilidad práctica posteriormente.

La utilización de evaluadores y simuladores nos permiten poner en primer plano el concepto de función como correspondencia y después la obtención del gráfico mediante las diferentes aproximaciones.

Para el estudio de las funciones cuadráticas, de acuerdo con la actual concepción, se parte de la definición en general de función cuadrática, después a partir del estudio de los casos más sencillos se van integrando elementos que permiten formular un procedimiento general para su representación gráfica y análisis de propiedades. Lo que responde al esquema:

Para el estudio de la función $y=x^2$ se sigue el procedimiento:

- Elaboración de una tabla de valores de la función
- Representación de los puntos en un sistema de coordenadas
- Unir los puntos representados
- Análisis de las propiedades a partir de los valores y su relación con el gráfico.

Este procedimiento general se basa en la idea de que en la práctica,

$$y = ax_2 + bx + c \quad (a=0) \leftarrow$$

$$y = x_2 \quad (a = 1, b=c=0)$$

$$y = ax_2 \quad (a < 0, 0 < a < 1, a > 1) \leftarrow$$

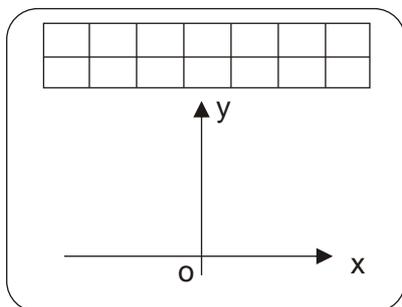
alumnos buscar la intersección del gráfico con el eje de las abscisas o de los gráficos entre sí en el caso de los sistemas, de manera que se logre una mayor actividad mental del escolar.

primero nos ponemos en contacto con ciertos valores funcionales que se han obtenido experimentalmente, estos valores se representan en un sistema de coordenadas, la unión de los puntos describe cierta curva que nos hace suponer la forma general que debe tener la expresión que permite obtener estos valores, una vez determinada la ecuación matemática que los representa se pueden calcular muchos más valores e intuir como sería el comportamiento del proceso o fenómeno en otros intervalos, a partir del reconocimiento del cumplimiento de ciertas propiedades que se hayan podido determinar.

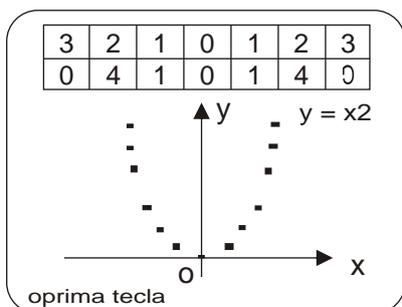
En este caso poseemos la ecuación que define la función, luego podemos evaluarla, representar los puntos, trazar su gráfico analizar las propiedades y posteriormente intuir como se debe comportar en otros intervalos.

Para hacer la representación gráfica de la función es necesario representar en un sistema de coordenadas rectangulares, todos los puntos cuyas coordenadas están determinada por la ecuación $y=x^2$, esto resulta imposible, luego debemos representar una cantidad adecuada de ellos, de modo que podamos formarnos una idea lo más cercana posible al verdadero gráfico de la función. Esto resulta muy trabajoso manualmente, por lo que resulta útil la utilización de una hoja electrónica de cálculo, si los alumnos ya saben opera con ellas, o un simulador especialmente elaborado, como el que se describe a continuación.

Tabla de valores con siete casillas vacías y la representación de los cuadrantes uno y dos del sistema de coordenadas rectangulares.

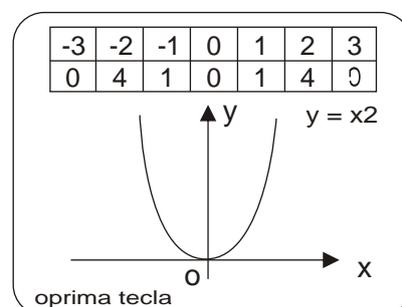


2) Se introduce por el teclado los valores de x (-3; -2; -1; 0; 1; 2;3) y automáticamente se van calculando los de y . En el sistema de coordenadas se van representando los puntos.



3) Al pulsar una tecla aparecen otros puntos correspondientes a valores intermedios.

4) Se pulsa una tecla y los puntos intermedios se van completando formando la parábola.



Otra variante de esta simulación puede ser introducir la posibilidad de limpiar la tabla de valores, manteniendo los puntos representados e irlos uniendo por una poligonal, de esta manera se puede ir reconstruyendo el gráfico para cada juego de datos, y se puede apreciar como la curva se va "rectificando", resultando más natural la aparición de la parábola, pues se obtiene por la unión de los puntos tal como se sucede con la recta en la función lineal.

En los dos casos los alumnos pueden apreciar que los puntos no están situados sobre una misma recta, de ahí que el gráfico no sea una recta sino una curva, mientras más puntos representemos más nos acercamos al verdadero gráfico de la función, esta idea queda clara en los estudiantes, pues al pulsar una tecla aparecen más puntos representados y posteriormente la curva. A continuación se les orienta a los escolares que realicen la representación gráfica en su libreta.

Ya en estos momentos se puede pasar a estudiar las propiedades, observando el gráfico de la función, en el gráfico se puede apreciar que la curva toca el eje x en un sólo punto, por tanto tiene un cero $x=0$.

El dominio está dado explícitamente en la definición de función cuadrática, cuando plantea:

"La correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$, se le hace corresponder ... "; además, en el trazado de la curva se pudo apreciar con detalle. La determinación de la imagen: $y \in \mathbb{R}$; $y \geq 0$, se apoya con el hecho de que sólo se utilizan los cuadrantes uno y dos del sistema, así como que todo número real x elevado al cuadrado es positivo.

El hecho de que los valores dados sean simétricos permite ilustrar la simetría con facilidad tanto en la tabla de valores como en el gráfico de la función.

La propiedad de la monotonía queda muy bien ilustrada, pues durante la construcción del gráfico computarizado, se puede detener la ejecución, lo que permite ver el comportamiento de la función en los intervalos fundamentales $x \geq 0$ y $x \leq 0$ dando una idea intuitiva de crecimiento y decrecimiento. A los conceptos de vértice de la parábola y valor mínimo, se puede llegar mediante la observación del gráfico y la tabla de valores.

Aunque el estudio de las funciones en la escuela se realiza de forma sistemática por tipos: lineales, cuadráticas, potenciales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas; esto no impide que se puedan desarrollar ciertos ejercicios en el nivel básico que entrenen al alumno en el trabajo con funciones, sin que ello obligue a un tratamiento conceptual específico. En noveno grado después de estudiar las funciones cuadráticas es posible reforzar el concepto de cero, monotonía, e introducir los extremos locales de una forma sencilla, mediante la evaluación de funciones cúbicas para sucesivos valores, analizando el comportamiento de la función en algunos intervalos.

Las calculadoras gráficas, o súper calculadoras como también se le llaman están siendo utilizadas con éxito en el estudio de las funciones y los conceptos asociados a ellas (Balderas, Patricia 1995), (Leal, Sandra 1995), (Ramírez, Betty 1995), (Valverde, Luis 1995), (Solís, Miguel 1995). En estos trabajos las calculadoras se utilizan como herramientas, pues tienen la posibilidad de asignar lista de datos a variables, presentar en pantalla una representación gráfica de la relación, analizar si constituye o no una función y hacer dado el caso el análisis de sus principales propiedades.

Un paso metodológico importante en el tratamiento de los teoremas es "la búsqueda del teorema", pero este paso no siempre es posible, pues en ocasiones los alumnos no poseen los conocimientos precedentes o no cuentan con los recursos necesarios.

La búsqueda del teorema con la participación de los estudiantes contribuye a fijar su contenido, para su posterior utilización en la resolución de los ejercicios, permite apoyar el trabajo que se realiza en función de los elementos lógicos lingüísticos, pues implica que el estudiante se entrene en expresarse con corrección y exactitud para la formulación de la proposición, además realiza una contribución notable al pensamiento matemático del escolar, pues le permite ver la Matemática como algo vivo en cuya construcción él participa y no como algo muerto que los demás han hecho y le trasmiten

A un teorema podemos llegar utilizando el método reductivo, que incluye la vía inductiva y la no inductiva. La implementación de la vía inductiva resulta más fácil desde el punto de vista didáctico, pues a partir de la realización de ciertos cálculos, se puede establecer una conjetura inicial o proposición que deberá ser posteriormente demostrada. La computadora y la calculadora como instrumentos de cálculo pueden ser muy útiles en este empeño.

La estrategia didáctica consiste en que el alumno trace, mida, calcule, compare y formule una proposición. Para la realización de los cálculos se dispondrá de una herramienta, la cual puede programarse por los propios estudiantes con antelación o simplemente utilizar el ordenador en modo inmediato o la calculadora, si es de este medio del que se dispone.

Esta estrategia didáctica posibilita la activación del aprendizaje, de acuerdo con la teoría de referencia, pues se propician la transición hacia las acciones mentales

pasando por las materiales y las verbales; son acciones materiales (medir, calcular), verbales (expresar las proposiciones o conjeturas), ahora bien, la formulación del teorema, la interpretación de la demostración y la aplicación constituyen expresiones de las acciones mentales internas, para sí.

Una de las funciones de la enseñanza de la Matemática es el proveer a los alumnos de sólidos conocimientos acerca de aquellas relaciones que son fundamentales, que poseen una importancia relativamente general y que, desde el punto de vista histórico, son relativamente estables. Las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo resultan desde este punto de vista esenciales para la formación matemática de los escolares.

El uso de la estrategia de trazar, medir, calcular, comparar y enunciar la relación, puede ser utilizada para el estudio de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

Los algoritmos

Los algoritmos pueden ser considerados uno de los núcleos fundamentales del conocimiento matemático. El estudio de la matemática puede estructurarse a partir del estudio de los algoritmos que permiten la resolución de los problemas de cálculo aritmético y una buena parte del cálculo algebraico y del geométrico.

El nivel primario y secundario se caracteriza por el estudio y fijación de los principales procedimientos algorítmicos - matemáticos; que constituyen la base del resto de los conocimientos que se estudiarán durante toda la vida escolar, es por ello que los algoritmos una vez

elaborados deben ser fijados y pasar a formar parte, de lo que se ha dado en llamar "sistemas personalizados de información", o sea la información individualizada en cada sujeto, que representa un conocimiento personal, las operaciones que configuran las capacidades cognoscitivas son personalizadas, luego un algoritmo se considera incorporado, cuando el individuo en presencia de un problema de ese tipo lo tiene disponible para ser efectivamente utilizado y cuando ante una nueva situación, puede hacer uso de él para insertarlo como un subalgoritmo o para modificarlo, dando lugar uno nuevo. Los algoritmos imprimen confianza en los escolares, pues ellos reconocen que si

aprenden un algoritmo y lo aplican correctamente encontrarán la solución adecuada,

después de un número finito de pasos.

La programación procedural exige la algoritmización del problema a resolver como premisa, reforzando la necesidad de establecer algoritmos de solución ante los problemas que se plantean, proporcionando como se ha señalado, una vía adecuada para la expresión precisa y la comprobación de la solución.

Definir algoritmo puede parecer una tarea fácil, lo cierto es que las múltiples definiciones dadas siempre dejan insatisfacciones, no obstante resulta adecuado dar una idea intuitiva del concepto, en este nivel de enseñanza, por tanto se puede plantear que *algoritmo es una secuencia de pasos ordenados que permiten la resolución exitosa de un problema y que se caracterizan por:*



Ser finitos.
Estar desprovisto de ambigüedades.
Siempre que se ejecuten correctos los pasos, debe quedar resuelto correctamente el problema.
Ser aplicable a todos los problemas de un mismo tipo.

Los algoritmos pueden representarse de diversas formas: diagramas, descripciones escritas, tablas, fórmulas, esquemas, ilustraciones gráficas y lenguajes de programación. No todos los algoritmos pueden ser fácilmente programados, de

ahí que hayamos diferenciado los algoritmos de los procedimientos algorítmicos.

Se entiende, en este contexto, por algoritmo la secuencia de pasos que puede ser programada en el lenguaje procedural seleccionado y como procedimiento algorítmico a la secuencia de pasos que pueden ser utilizados para resolver un cierto tipo de problema, pero que no podemos programar, por lo que se debe utilizar para su representación algunas de las otras formas mencionadas anteriormente.

Como estrategia metodológica general para el tratamiento de los algoritmos y los procedimientos algorítmicos desde un enfoque computacional puede seguirse la que a continuación se describe. Al hablar de enfoque computacional, nos estamos refiriendo aquí en particular a las posibilidades de utilizar un lenguaje de programación para describir el algoritmo y a disponer del equipamiento necesario para su ejecución; no obstante las orientaciones que se dan para la búsqueda, implementación y aplicación del algoritmo, resultan válidas en cualquier circunstancia.

Estrategia metodológica general para el tratamiento de los algoritmos

- I. **Búsqueda del algoritmo.**
- II. **Describir el algoritmo en un lenguaje de programación.**
- III. **Ejecutar el programa en la microcomputadora verificando su efectividad.**
- IV. **Ejecutar el programa haciendo uso del Debug.**
- V. **Generalizar verbalmente los pasos de resolución.**
- VI. **Passar a la resolución de otros problemas, donde el programa pueda ser utilizado como herramienta computacional.**

I. La búsqueda del algoritmo debe conducirse haciendo uso de los recursos heurísticos, dentro de los cuales recomendamos:

- ✍ Considerar analogías, o sea, analizar que otro algoritmo de los ya estudiados resulta similar al que se está buscando, de esta manera los alumnos podrán disponer de una referencia.
- ✍ Reducir el problema a uno ya resuelto, suprimiendo condiciones iniciales o mediante el análisis de un caso particular previo antes de darle solución al problema en general.
- ✍ Analizar si es necesario realizar una diferenciación de casos, tal y como sucede con la búsqueda del algoritmo para la resolución de ecuaciones de segundo grado.

La estrategia de búsqueda del algoritmo puede ser inductiva o deductiva.

La vía inductiva presupone descomponer el problema en sus partes, darle solución a cada tarea específica y posteriormente componer el algoritmo en general que resuelve el problema; la vía deductiva consiste en abordar el problema en su generalidad, dar un nivel de respuesta global y después describir los algoritmos correspondientes a cada tarea o módulo.

Cuando se va a abordar un nuevo algoritmo se debe enfrentar a los escolares ante la situación real, que condiciona la necesidad de elaborar el algoritmo y tratar que sean los propios estudiantes los que formulen el problema correspondiente. Es conveniente que el problema quede planteado en términos de programación, de esta manera el alumno se ve ante el reto que significa elaborar un programa para que el problema sea resuelto por la máquina, lo que resulta altamente motivante para la mayoría de los escolares y posibilita estructurar la actividad docente de manera efectiva.

Para el logro de este propósito el profesor durante la preparación de la clase debe preguntarse:
¿Cómo presentar la situación

problema de manera tal que la búsqueda del algoritmo de resolución se convierte en una necesidad?

¿Posee el alumno todos los conocimientos previos necesarios para enfrentar la resolución del problema?

¿Hemos previsto las condiciones iniciales que presuponen la resolución del problema a fin de debelarla ante nuestro estudiantes?

Si los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios que le permitan elaborar el nuevo algoritmo este será presentado por el profesor, pero siempre garantizando la actividad del alumno en todos los pasos que sea posible.

Al comenzar la actividad deben quedar contestadas las preguntas que los alumnos se están realizando en ese momento:

¿Para qué es necesario?
¿Qué problema va a resolver?

Una fase importante en la búsqueda del algoritmo es separar los elementos conocidos de los desconocidos y plantear a los alumnos la problemática consistente en tratar de llegar a lo desconocido a partir de lo que se conoce, para ello debe tratarse de

- ¿Qué se desea obtener?
- ¿Qué datos o elementos iniciales poseemos?
- ¿Qué se logró con este paso?
- ¿Qué nos falta para llegar al resultado final?
- ¿Cómo proceder en este caso?

Una vez encontrada la vía de resolución, se estructura la misma en pasos y se procede a describirla, primero en un lenguaje más cercano al natural y posteriormente si es posible en un lenguaje de programación, que permita su comprobación.

Para la ejecución del programa en la computadora es necesario editarlo y seleccionar los datos de prueba adecuados, se deben ir complejizando los datos de manera tal que se pueda verificar la efectividad del programa confeccionado.

Cuando un algoritmo no resulta general se debe hacer énfasis sobre las condiciones en que resulta útil su implementación y en que casos no es utilizable, esta situación debe quedar clara para los estudiantes.

Una vez que hayamos formulado el algoritmo es recomendable entrenar al alumno en su perfeccionamiento y nivel de optimización para ello lo sometemos a las siguientes consideraciones:

- ¿Puede suprimirse algún paso de los datos?
- ¿Existen otras vías?
- ¿El procedimiento encontrado, es el más general, el que resuelve todos los problemas del mismo tipo? ¿Cuáles no? ¿Qué podemos hacer para que los incluya?

Para lograr la participación mental activa de los alumnos durante la actividad debe garantizarse que:

Conozcan con claridad el objetivo final que se desee alcanzar y la necesidad de realizar cada paso.

- ✍ Sean conscientes en cada momento de lo que nos proponemos alcanzar.
- ✍ Dominen los subalgoritmo necesarios para poder comprender

el actual, así como los conceptos o teoremas relacionados con el algoritmo que se desea implementar.

Los alumnos deben quedar convencidos que el algoritmo elaborado racionaliza el trabajo y por tanto es conveniente aprenderlo, reproducirlo y aplicarlo.

II-III. En las etapas de búsqueda, descripción y prueba del algoritmo se destacan los siguientes pasos:

Enfrentar al escolar ante la situación real que se desea resolver y enunciar el problema.

Si con los conocimientos que posee el alumno no le es posible enunciar el problema, este puede darse formulado y pasar a su interpretación.

Determinar los elementos que se dan como datos y las condiciones iniciales del problema.

Esclarecer los elementos que se desean obtener.

Búsqueda de la vía de resolución y estructuración de la misma en pasos, utilizando un lenguaje de programación.

Selección de datos de prueba adecuados a las condiciones iniciales del problema.

Análisis de otras vías posibles y enjuiciamiento de su nivel de optimización.

Ejecución del programa con diferentes juegos de datos (datos límites) para verificar su total efectividad.

Reconsideración del procedimiento elaborado, si fuera necesario.

IV. La próxima etapa en la estrategia metodológica consiste en la ejecución del programa haciendo uso del Debug, este paso no es imprescindible, no obstante resulta muy útil, pues el alumno puede apreciar los valores que van tomando las variables durante la ejecución del programa, y la secuencia de las operaciones lo que apoya la fijación del algoritmo.

V. La generalización verbal del algoritmo de resolución de un

problema ayuda a fijarlo, por lo que debe tenerse en cuenta, sobre todo durante las clases de ejercitación.

Durante las primeras sesiones de trabajo manual con el algoritmo, el alumno puede utilizar el programa como un apoyo visual - escrito, que le permita ir ejecutando cada paso. En esta etapa los ejercicios formales que se elaboren o seleccionen del texto deben tener este propósito, siempre en orden creciente de dificultad que se manifiesta en: formas de presentación del problema, complejidad en los cálculos numéricos, cambio de letras para nombrar las variables, entre otras.

Esta etapa repetitiva en el proceso de adquisición del conocimiento tiene como objetivo fijar los procedimientos o algoritmos, esta repetición debe ir complementada por el pensamiento teórico; "el alumno debe ser capaz de identificar las características y propiedades esenciales de los conocimientos que le sirven de base, comprender la orientación necesaria para realizar la acción y también poseer los conocimientos y operaciones lógicas que enlazan el plan de acción con los conocimientos y su ejecución". A partir de este momento se proporcionan ejercicios que permitan ir del procedimiento específico estudiado a un procedimiento generalizado, que es el que se pretende formar en el alumno.

VI. La sexta etapa relacionada con la utilización del programa como herramienta para la resolución de problemas implica un aporte sustancial de la computación a la enseñanza de la matemática, pues permite centrar la atención del alumno en la lectura, interpretación y elaboración de un