Esta repetición de la tarea con nuevos datos tenía una doble finalidad, por una lado pretendía garantizar que la tarea había sido adecuadamente comprendida por los estudiantes y por otro, que efectivamente los estudiantes podían poner en funcionamiento recursos y estrategias de partida. Finalmente en esta actividad se limitaba la movilidad en los parámetros pidiendo ya no una parábola en particular, sino una familia de parábolas que pudieran satisfacer las exigencias del problema. Este salto de la parábola en particular a la familia de parábolas en general, pretendía favorecer estrategias de formulación y validación del saber matemático que se pretendía ver aparecer entre los estudiantes.
Con esta actividad se quiso que los estudiantes reconocieran la naturaleza del contacto entre una recta y una parábola, apoyándose en sus conocimientos formados durante sus prácticas escolares previas. La noción de referencia de lo que es una tangente, se refería al caso específico de tangente a un círculo. Esta noción, al seno de la actividad sería llevada hacia el caso de la parábola y más adelante se buscaría la centración del contacto en una región de la parábola. Esto es, se buscaría mediante las actividades propuestas, que una cierta necesidad de considerar la propiedad de tangencia como una propiedad local.

Actividad 12

Explora con tu calculadora

¿Qué valores se deben asignar a los parámetros A, B y C para que la gráfica de la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$ sea tangente a la recta en el punto que se te indica? Resuelve el problema para cada uno de los incisos.

Define en tu calculadora el rango que se indica enseguida el cual te servirá para todos los incisos de esta actividad.

RANGE				
xMin =-1.5				
xMax =1-5				
xScl = .5				
yMin = -1				
yMax = 5				
yScl = 1				
y(x)	RANGE	ZOOM	TRACE	GRAPH ♦

Es necesario que en cada ensayo que realices indiques los valores de los parámetros y bosquejes la gráfica de la parábola obtenida.

1. Ecuación de la recta $y = x + 2$
   Punto de tangencia sobre la recta: (0, 2)
2. Ecuación de la recta $y = -x + 2$
   Punto de tangencia sobre la recta: (0, 2)
3. Ecuación de la recta $y = 2x+2$
   Punto de tangencia sobre la recta: (0, 2)
4. Ecuación de la recta $y = -2x+1$
   Punto de tangencia sobre la recta: (0, 1)
5. ¿Cuál es la familia de cuadráticas $y = Ax^2 + Bx + C$ cuyas gráficas son tangentes a la recta $y = 3x-2$ en el punto (0,-2)?
6. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 6$ en su punto de intersección con el eje y?

En los incisos 1 al 3, acompañamos al texto anterior del dibujo de la recta que verían al graficar la función lineal con la escala previamente establecida; debajo de cada ventana, se dejaban en blanco espacios por completar con sus diferentes ensayos de los valores propuestos para los parámetros A, B y C de la ecuación cuadrática.

En la siguiente actividad, como ya habíamos anticipado, usamos el mismo formato de preguntas y cambiamos el valor de una de las variables de control, al permitir que punto de tangencia, estuviera fuera del eje de las y's. Como podrá anticiparse, ello tenía la intención de exigir un cambio de contexto y en consecuencia, satisfacer a una de las exigencias metodológicas: Reconocer que la regularidad lineal, aquella vinculada con la definición de Lagrange, es invariante respecto de la particular ubicación del punto de tangencia. De hecho, este hallazgo, de darse entre los estudiantes, sería el instrumento de control de parte del alumno, para verificar la certeza de sus predicciones.

Una vez que la articulación de movimientos de la parábola "pareciera dejarla en contacto tangencial con la recta", las y los estudiantes, tendrían bajo su control dos estrategias de verificación: una consistía en lograr, con los sucesivos acercamientos del punto de contacto mediante la tecla ZOOM, una cercanía entre las curvas de manera que fuese plausible creer que la recta y la parábola eran efectivamente tangentes. La otra podría no sólo reforzar a la anterior sino que se tornaría en un criterio de validez alternativo, si la recta y la parábola establecen entre sí un punto de tangencia, entonces sus ecuaciones exhibirían inevitablemente el siguiente aspecto:

Cuando tenemos el punto de contacto en (0, C), la función cuadrática tendrá la expresión $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, mientras que la función lineal lucirá, inevitablemente como $R(x) = Bx + C$.
La coincidencia en los dos últimos factores de la cuadrática con los factores de la lineal, tendría según nuestra predicción en el diseño de la secuencia, que ser descubierta primero por ellos en sus actividades individuales; para que después en sus discusiones grupales, lograran formularlo y validarlo como un resultado matemático fruto de sus acciones sobre las situaciones planteadas. Esta imbricación entre la parábola $P(x)$ y la recta $R(x)$, en el dominio de sus expresiones algebraicas (es decir, $P(x) = Ax^2 + R(x)$), daría entonces el segundo aspecto del control de la situación por parte del estudiante.

Cuando el punto de contacto está en (p,C) la situación sería equivalente, $P(x) = A(x - p)^2 + B(x - p) + C$, mientras que la función lineal lucirá, inevitablemente como $R(x) = B(x - p) + C$

Una tercera etapa en la experiencia consistía en plantear las mismas preguntas que empleamos respecto de la naturaleza del punto de contacto entre una recta y una parábola, pero ahora se trataría del contacto entre dos parábolas. Esta actividad estaba dirigida a fortalecer la autonomía de los hallazgos de los estudiantes respecto de la particularidad de las curvas tratadas, así como a utilizar a la recta como un intermediario en la solución. Los recortes efectuados al contenido, nos exigían no abandonar rápidamente el reducido universo de formas gráficas que habíamos construido, a saber, recta recta y parábola y eventualmente cúbica. En esta situación, era posible esperar de parte de los estudiantes, que incorporaran como elemento auxiliar una recta que fuese tangente a ambas parábolas y de este modo, afianzar sus afirmaciones con elementos parcialmente conocidos, pero también era posible esperar que la estructura de la estrategia fuese empleada sin atender a la naturaleza de las curvas. De manera que en este caso, tendrían que llevar sus estra- tegias previas acercamientos suce- sivos en la pantalla de la calculadora gráfica y el reconocimiento de la regularidad lineal a la nueva situación que se les había planteado. Sugerimos sin embargo que podrían auxiliarse de la recta.

Mas adelante propusimos una nueva situación, se trataba de las actividades 15 y 16, con ellas pretendimos plantear escenarios que precisaran de un cierto tipo de anticipaciones causales y de que inversión de los procedimientos. Claramente estas actividades tendrían una serie de dificultades adicionales a las actividades anteriores, pero resultarían fundamentales para emitir algún tipo de juicios que no se limite a los aspectos del contrato didáctico. De algún modo, estas actividades buscaban un cierto principio de reversibilidad en sus respuestas. Ello, como es de esperarse, fue logrado sólo por una parte del grupo de estudiantes. En esencia, las actividades proponían la construcción de una función derivada y la anticipación de una primitiva.

En el primer caso, toda vez que las acciones que realizaban los estudiantes al estudiar las tangentes les permitían pasar de una fórmula a una gráfica y viceversa, ahora queríamos que su atención se centrase sólo en la pendiente de la recta, ya no en la recta en sí. Estas actividades fueron abordadas casi exclusivamente con el empleo de la fórmula de la pendiente y de los acercamientos sucesivos que podían realizar a la parábola en distintos puntos.
Aunque no haremos aquí un análisis a profundidad de la naturaleza de las respuestas de los estudiantes, si indicaremos que fue posible alcanzar explicaciones robustas sobre la relación entre la función derivada y la función de partida. Relaciones que se ubicaban al nivel de los procedimientos empleados para su obtención (toma un punto sobre la parábola, traza la recta tangente, encuentra su pendiente, coloca ese valor como la ordenada de una nueva curva y después de repetir esos procedimientos para varios puntos, une los puntos de la nueva curva que es de hecho, una línea recta). Sus explicaciones giraron entorno de que la pendiente de la tangente en cada punto era la ordenada de la nueva recta. Así que un cero en la nueva recta, correspondería a un punto sobre la parábola donde su tangente fuese horizontal. Este y otros argumentos aparecieron entre las respuestas que los alumnos eran capaces de formular en sus equipos de trabajo.
La última de las actividades se centró, como recién dijimos, en el problema inverso. Se les daba una línea recta y se les pedía que encontraran una parábola de la cual esta fuese su derivada. De nuevo, el manejo con la intervención de la calculadora gráfica permitía una cierta autonomía de los estudiantes, al menos al nivel de sus exploraciones disponibles.

7. Consideraciones finales

Esta experiencia didáctica, que permitió participar simultánea y coordinadamente diversos elementos socioepistemológicos, con la intervención de las calculadoras con capacidad gráfica entre estudiantes de bachillerato sin antecedentes de análisis matemático básico, permite configurar, no sólo una robusta ruta de investigación, sino también una postura crítica ante el uso de los recursos tecnológicos

En este sentido, nuestra posición al respecto consiste en asumir que es posible lograr afectar la naturaleza del aprendizaje de ideas matemáticas entre los estudiantes si la inter- vención de los medios y dispositivos didácticos se acompañan seria- mente de investigación en el campo de la matemática educativa. De manera que, a diferencia de las posturas empiristas para quienes la sola incorporación del recurso tecnológico basta para producir ganancias educativas, nosotros consideramos, que al igual que una pieza de conocimiento, exige del examen minucioso del efecto que tendrá entre los que aprenden. De hecho consideramos, como lo prueba este estudio, que la intervención de medios didácticos es insuficiente para lograr mejoras en el aprendizaje si no se transforman los medios en verdaderos dispositivos didácticos en los que el conocimiento

8. Referencias bibliográficas

- *Artigue, M. (1998).* L'Evolution d'une problematique en didactique de l'analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. En prensa

- *Azcárate, C. (1990).* *La velocidad: Introducción al concepto de derivada*. Tesis doctoral. España: Universitat Autònoma de Barcelona.

- *Cantoral, R. (1997).* Pensamiento y lenguaje variacional. *Cuadernos del Seminario de Investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa. México: Cinvestav.*

- *Cantoral, R. (1995).* Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la Serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101.

- *Cantoral, R. (1990).* *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis Doctoral. México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.

- *Dagher, A. (1994).* *Apprentissage dans un environnement informatique: possibilite, nature, transfert des acquis*. Francia: Equipe Didirem, Univerité Paris 7.

- *Dolores, C. (1989).* *Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de derivada*. Tesis de maestría. México: Universidad Autónoma de Guerrero.

- *Farfán, R. (1997).* *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- *García, D. (1998).* Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo. *Tesis de Maestría. México: Cinvestav.*

- *Ruthven, K. (1992).* Personal Technology and Classroom Change: A British Perspective. En T. J. Fey (Ed.). *Calculator in mathematics education: 1992 yearbook* (pp. 91-100). Reston, VA: NCTM.

- *Sierpinska, A. (1992)* On understanding the concept of function. En *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Dubinsky, E. y G. Harel (Eds.). Notes 25, MAA: 23-58.